

Présentation du projet :

Justification des résultats classiques de la structure de Mark Serrurier

Association VOYAGER 3 Astronomie

- 1bis Impasse Galaxie - 44530 Sévérac -

*Association (Loi 1901) pour l'initiation et la pratique de l'astronomie,
Agrément Jeunesse & Education Populaire N°44-08-12*

Commission technique de VOYAGER 3 Astronomie
Sébastien POIRIER

SOMMAIRE

Hypothèse de l'étude

Position des points sans subir la flexion

Position des points subissant la flexion

Variations des longueurs des 8 barres

Énergie potentielle élastique associée aux barres

Énergie potentielle de pesanteur

Énergie potentielle totale

Principe de stationnarité

Conclusion

Hypothèse de l'étude :

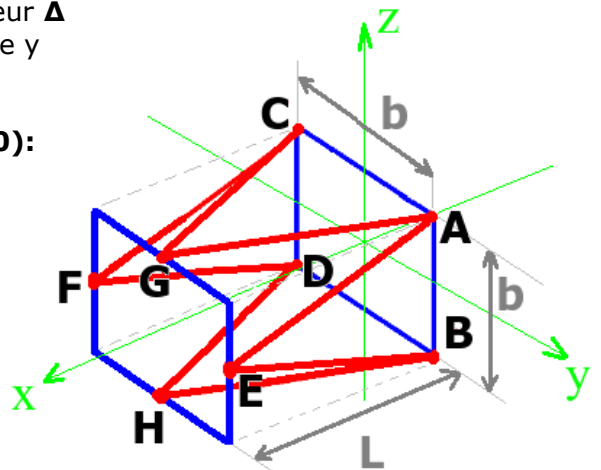
- L'axe du tube est horizontal (axe x). La gravité est orienté vers les z négatifs.
- Les barres ne travaillent qu'en traction-compression. Il n'y a pas de flexion des barres.
- Le plan des points A, B, C, et D est un corps fixe et rigide et le plan des points E, F, G et H est un corps rigide qui porte la charge de masse M, supposée appliquée en son centre (L,0,0)
- La masse totale des 8 barres, barres identiques et homogène, vaut m.

Ainsi, en raison des symétries, le plan rigide a trois degrés de liberté, potentiellement non nuls :

- une translation d'axe l'axe x de valeur u
- une translation d'axe l'axe z de valeur Δ
- une rotation d'angle φ et d'axe l'axe y

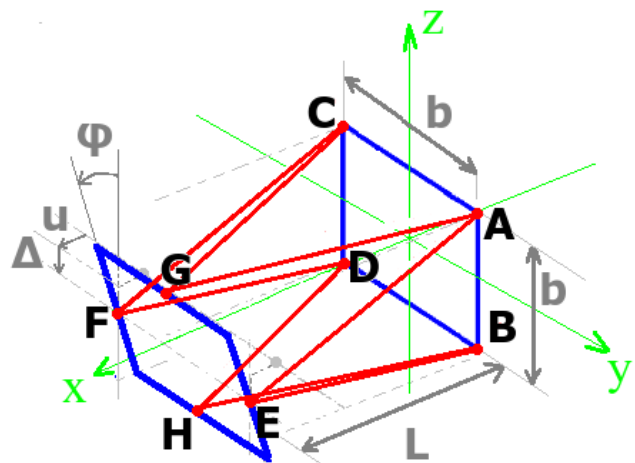
Position des points sans subir la flexion (tel que $g=0$):

$$\begin{aligned} A\left(0, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) \quad B\left(0, \frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad C\left(0, -\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) \\ D\left(0, -\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad E\left(L, \frac{b}{2}, 0\right) \quad F\left(L, -\frac{b}{2}, 0\right) \\ G\left(L, 0, \frac{b}{2}\right) \quad H\left(L, 0, -\frac{b}{2}\right) \end{aligned}$$



Position des points subissant la flexion:

$$\begin{aligned} E\left(L+u, \frac{b}{2}, -\Delta\right) \\ F\left(L+u, -\frac{b}{2}, -\Delta\right) \\ G\left(L+u+\frac{b}{2}\sin\varphi, 0, \frac{b}{2}\cos\varphi-\Delta\right) \\ H\left(L+u-\frac{b}{2}\sin\varphi, 0, -\frac{b}{2}\cos\varphi-\Delta\right) \end{aligned}$$



or la rotation φ correspond à un petit angle donc $\sin\varphi \simeq \varphi$ et $\cos\varphi \simeq 1$

D'où par linéarisation :

$$E\left(L+u, \frac{b}{2}, -\Delta\right) \quad F\left(L+u, -\frac{b}{2}, -\Delta\right) \quad G\left(L+u+\frac{b}{2}\varphi, 0, \frac{b}{2}-\Delta\right) \quad H\left(L+u-\frac{b}{2}\varphi, 0, -\frac{b}{2}-\Delta\right)$$

Variations des longueurs des 8 barres :

On pose T la longueur avant contrainte des 8 barres identiques : $T = \frac{1}{2}\sqrt{4L^2+b^2} = \sqrt{L^2+\frac{b^2}{4}}$

et pour chaque barre $\Delta T_{barre} = T_{barre} - T$ avec T_{barre} la longueur de la barre sous contrainte.

Les longueurs des barres sous contrainte et sous forme linéarisé en φ sont :

$$\begin{aligned} \text{pour AG et CG : } T_{AG} &= T_{CG} = \sqrt{\left(L + u + \frac{b}{2}\varphi\right)^2 + \frac{b^2}{4} + \Delta^2} \\ \text{pour BH et DH : } T_{BH} &= T_{DH} = \sqrt{\left(L + u - \frac{b}{2}\varphi\right)^2 + \frac{b^2}{4} + \Delta^2} \\ \text{pour AE et CF : } T_{AE} &= T_{CF} = \sqrt{(L + u)^2 + \left(-\Delta - \frac{b}{2}\right)^2} \\ \text{et pour BE et DF : } T_{BE} &= T_{DF} = \sqrt{(L + u)^2 + \left(-\Delta + \frac{b}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

T_{barre} peut être mis sous la forme $T_{\text{barre}} = T \sqrt{1 + \epsilon_{\text{barre}}}$ avec $\epsilon_{\text{barre}} = \frac{T_{\text{barre}}^2 - T^2}{T^2}$

Ainsi, à l'ordre 1 du développement limité en ϵ_{barre} , on a : $T_{\text{barre}} \simeq T \left(1 + \frac{\epsilon_{\text{barre}}}{2}\right)$

D'où $\Delta T_{\text{barre}} \simeq \frac{\epsilon_{\text{barre}} T}{2}$. Ainsi pour chaque barre : $\Delta T_{\text{barre}} \simeq \frac{T_{\text{barre}}^2 - T^2}{2T}$

On réalise un développement limité au premier ordre en u , Δ et φ et on obtient :

$$\Delta T_{AG} \simeq \frac{L}{T} \left(u + \frac{\varphi b}{2}\right) \quad \Delta T_{BH} \simeq \frac{L}{T} \left(u - \frac{\varphi b}{2}\right) \quad \Delta T_{AE} \simeq \frac{L}{T} \left(u + \Delta \frac{b}{2L}\right) \quad \Delta T_{BE} \simeq \frac{L}{T} \left(u - \Delta \frac{b}{2L}\right)$$

Énergie potentielle élastique associée aux barres :

Une barre de longueur T , de section S et de module E , soumise à un effort f , s'allonge d'une longueur e . D'après la loi de Hooke : $\sigma = E \epsilon$.

Dans notre cas $\sigma = \frac{f}{S}$ et $\epsilon = \frac{e}{T}$ d'où $\frac{f}{S} = E \frac{e}{T}$ ainsi $f = \frac{ES}{T} e$

Ainsi, les barres se comportent comme des ressorts de raideur $k = \frac{ES}{T}$

On charge la barre de manière quasi statique, de 0 jusqu'à l'allongement final e . Ainsi, le travail de l'effort f est stocké sous forme d'énergie élastique :

$$U_e = \int_0^e f de \quad U_e = \int_0^e \frac{ES}{T} e de \quad U_e = \frac{1}{2} \frac{ES}{T} e^2 \quad \text{d'où} \quad U_e = \frac{1}{2} k e^2$$

On a montré au paragraphe précédent qu'à l'ordre 1 :

$$\Delta T_{AG} \simeq \frac{L}{T} \left(u + \frac{\varphi b}{2}\right) \quad \Delta T_{BH} \simeq \frac{L}{T} \left(u - \frac{\varphi b}{2}\right) \quad \Delta T_{AE} \simeq \frac{L}{T} \left(u + \Delta \frac{b}{2L}\right) \quad \Delta T_{BE} \simeq \frac{L}{T} \left(u - \Delta \frac{b}{2L}\right)$$

Or, la somme sur les 8 barres des énergies stockées sous forme élastique est donnée par :

$$U_{\text{total}} = \frac{1}{2} k \left(2(\Delta T_{AG})^2 + 2(\Delta T_{BH})^2 + 2(\Delta T_{AE})^2 + 2(\Delta T_{BE})^2 \right)$$

d'où finalement : $U_{\text{total}} \simeq \frac{k}{2T^2} (8L^2 u^2 + L^2 b^2 \varphi^2 + b^2 \Delta^2)$

Énergie potentielle de pesanteur :

Pour la masse M dans le plan des points E, F, G et H, son centre de gravité descend d'une hauteur Δ .

$$\text{Ainsi, } E_{p,M} = -Mg\Delta$$

Chacune des 8 barres a une masse de $\frac{m}{8}$ et un centre de gravité noté C_{barre} .

Ainsi, les coordonnées du centre de gravité de chaque barre sous forme linéarisé en φ sont:

$$\begin{aligned} C_{AG} & \left(\frac{L+u}{2} + \frac{b\varphi}{4}, \frac{b}{4}, \frac{b-\Delta}{2} \right) & C_{CG} & \left(\frac{L+u}{2} + \frac{b\varphi}{4}, -\frac{b}{4}, \frac{b-\Delta}{2} \right) & C_{BH} & \left(\frac{L+u}{2} - \frac{b\varphi}{4}, \frac{b}{4}, \frac{-\Delta-b}{2} \right) \\ C_{DH} & \left(\frac{L+u}{2} - \frac{b\varphi}{4}, -\frac{b}{4}, \frac{-\Delta-b}{2} \right) & C_{AE} & \left(\frac{L+u}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b-\Delta}{2} \right) & C_{CF} & \left(\frac{L+u}{2}, -\frac{b}{2}, \frac{b-\Delta}{2} \right) \\ C_{BE} & \left(\frac{L+u}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{b-\Delta}{2} \right) & C_{DF} & \left(\frac{L+u}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{b-\Delta}{2} \right) \end{aligned}$$

Or, l'énergie potentielle de pesanteur d'une barre $E_{p,\text{barre}}$ vaut : $E_{p,\text{barre}} = \frac{m}{8} g \Delta z_{C_{\text{barre}}}$

avec $\Delta z_{C_{\text{barre}}}$ la variation suivant l'axe de z de la coordonnée du centre de gravité de la barre.

Ce qui donne pour la somme $E_{p,m}$ des énergies potentielles des 8 barres à l'ordre 1 :

$$E_{p,m} \simeq \frac{m}{8} g \left(\left(\frac{b-\Delta}{2} + \frac{b-\Delta}{2} + \frac{b}{4} + \frac{-\Delta-b}{2} - \frac{b}{4} + \frac{-\Delta-b}{2} + \frac{b}{4} - \frac{\Delta}{2} + \frac{b}{4} - \frac{\Delta}{2} - \frac{b}{4} - \frac{\Delta}{2} - \frac{b}{4} - \frac{\Delta}{2} \right) - \left(2\frac{\Delta}{2} - 2\frac{\Delta}{2} \right) \right)$$

d'où, $E_{p,m} \simeq -mg\frac{\Delta}{2}$. On peut noter que sans linéarisation en φ , on obtient: $E_{p,m} = -mg\frac{\Delta}{2}$

Énergie potentielle totale :

L'énergie potentielle totale est donc : $E_{\text{tot}} = U_{\text{total}} + E_{p,M} + E_{p,m}$

$$\text{Ainsi, } E_{\text{tot}} \simeq \frac{k}{2T^2} (8L^2u^2 + L^2b^2\varphi^2 + b^2\Delta^2) - Mg\Delta - mg\frac{\Delta}{2}$$

Principe de stationnarité :

L'énergie potentielle totale dépend des 3 degrés de liberté u, φ et Δ .

D'après le principe de stationnarité, l'énergie potentielle totale à l'équilibre est telle que :

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial \Delta} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \frac{8kL^2}{T^2} u = 0, \quad \frac{kL^2b^2}{T^2} \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{kb^2}{T^2} \Delta - Mg - \frac{1}{2}mg = 0 \quad \text{or} \quad k = \frac{ES}{T}$$

$$\text{Ainsi, } u=0, \quad \varphi=0 \quad \text{et} \quad \frac{ESb^2}{T^3} \Delta - Mg - \frac{1}{2}mg = 0$$

$$\text{et finalement } \Delta = \frac{gT^3}{ESb^2} \left(M + \frac{m}{2} \right)$$

D'où les positions des points après déformation au premier ordre :

$$E \left(L, \frac{b}{2}, -\Delta \right) \quad F \left(L, -\frac{b}{2}, -\Delta \right) \quad G \left(L, 0, \frac{b}{2} - \Delta \right) \quad H \left(L, 0, -\frac{b}{2} - \Delta \right)$$

Conclusion :

On retrouve les résultats classiques de la structure Serrurier à l'ordre 1 : $\varphi=0$ et $u=0$

$\varphi=0$, c'est à dire : pas de rotation du plan de référence du miroir
 $u=0$, c'est à dire : pas de variation de la distance des 2 plans

et une valeur pour Δ telle que $\Delta = \frac{g T^3}{E S b^2} \left(M + \frac{m}{2} \right)$

Remarque :

Pour notre choix géométrique, il suffit de substituer L par $L-e$ dans l'expression de T .

Cela donne $T_i = \frac{1}{2} \sqrt{4(L_i - e)^2 + b^2}$.

L'expression de Δ reste inchangée : $\Delta_i = \frac{g T_i^3}{E S_i b^2} \left(M_i + \frac{m_i}{2} \right)$.

