

Présentation du projet :

Réalisation d'un tube de télescope suivant le principe de la structure de Mark Serrurier

Association VOYAGER 3 Astronomie

- Espace culturel de la Garenne - 44530 Sévérac -

*Association (Loi 1901) pour l'initiation et la pratique de l'astronomie,
Agrément Jeunesse & Education Populaire N°44-08-12*

Commission technique de VOYAGER 3 Astronomie
Sébastien POIRIER

SOMMAIRE

- 1. Effet de la flexion du tube d'un télescope**
- 2. La structure de Mark Serrurier**
- 3. Schématisation d'un télescope respectant la structure de Mark Serrurier**
- 4. Résolutions des équations**
- 5. Références**

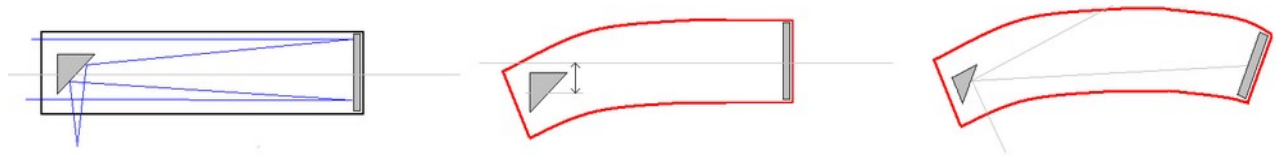
I) Effet de la flexion du tube d'un télescope

Quelle que soit la nature des matériaux et la forme de la structure, le tube du télescope est soumis à la gravité. Son poids, ainsi que celui des miroirs qu'il supporte, entraîne une flexion qui conduit à une modification de la ligne de visée suivant laquelle nous observons.

La modification de la ligne de visée à une double origine :

- 1) L'axe optique définie par le jeu de miroir est modifié
- 2) L'inclinaison relative des miroirs est modifiée.

Nous illustrons ici la situation d'un miroir incliné à 45° , correspondant au cas d'un télescope de Newton. On peut évidemment faire un raisonnement similaire pour un télescope de type Cassegrain.



D'après le schéma ci-dessus, images 1 et 2, le premier effet dû à la différence de flexion de la structure côté primaire et la flexion de la structure côté secondaire, conduit à un décalage de la ligne de visée doublé par la réflexion sur le miroir secondaire. Le second effet schématisé sur l'image 3, correspond à la modification de l'inclinaison relative du plan du miroir primaire et du miroir secondaire. Additionné à l'effet précédent, nous obtenons la modification globale de la ligne de visée due à la flexion de la structure.

La réalisation d'un télescope nécessite de limiter ces effets selon la précision d'observation que l'on souhaite.

Pour une observation visuelle ces effets sont nullement contraignants. Pour l'imagerie du ciel profond, des temps de poses longs sont nécessaires, la flexion du tube est comparable à un défaut de suivi qui ne peut être corrigé, contrairement à un vrai défaut de suivi que l'on corrigerait par un autoguidage sur un système optique monté en parallèle.

Une solution pour s'affranchir de ces effets est la solution introduite par Mark Serrurier (1938) .

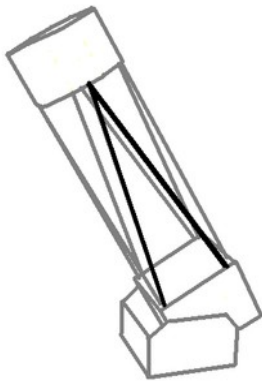
II) La structure de Mark Serrurier

2.1) L'appellation « tube Serrurier ».

Avant de décrire la structure Serrurier dans son ensemble, il est nécessaire de donner quelques précisions sur l'appellation « tube Serrurier ».

Par abus de langage, de nombreux tubes de télescopes sont qualifiés de « tube Serrurier » bien qu'ils ne possèdent qu'une partie des caractéristiques de la structure Serrurier.

C'est bien souvent la solution choisie pour les Dobsons. Les Dobsons, sont des télescopes de Newton de diamètre conséquent et de structure légère afin d'être mobile. Ils sont réalisés suivant une monture azimutale et réservés à l'observation visuelle.



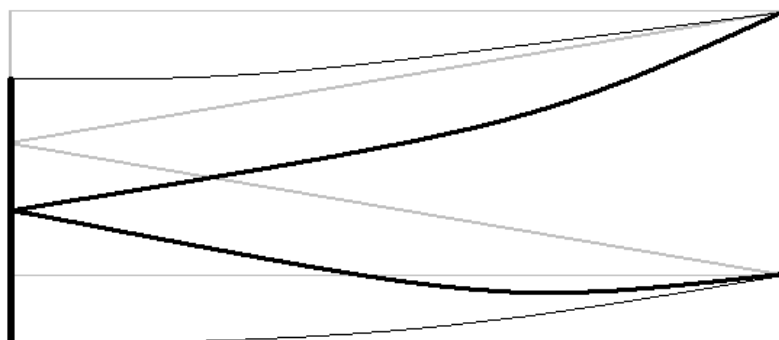
Les quatre structures triangulaires (cf. figure à gauche) sont caractéristiques de la solution de Serrurier, d'où l'utilisation de l'appellation. Toutefois, la raison de l'utilisation de la structure triangulaire est autre. Elle permet de réaliser une structure légère en « limitant » la flexion. L'observation restant visuelle, cela n'a pas d'incidence majeure.

En réalité la structure de ce type de télescopes pourrait être qualifiée de demi-Serrurier puisque seule la structure du côté secondaire comporte 4 triangles.

En étudiant la flexion de cette partie on constate deux choses:

(1) A masse égale, il existe des structures qui fléchissent moins (Doyle 1992). Ceci semble être un défaut puisqu'il renforce le premier défaut décrit dans la partie I.

(2) Le cadre supportant le miroir secondaire reste parallèle par rapport à son orientation théorique sans flexion. En réalité il y a une légère modification de son orientation dépendant de la rigidité du cadre. Cet effet étant très atténué par rapport à une structure classique il ne devient plus limitant.

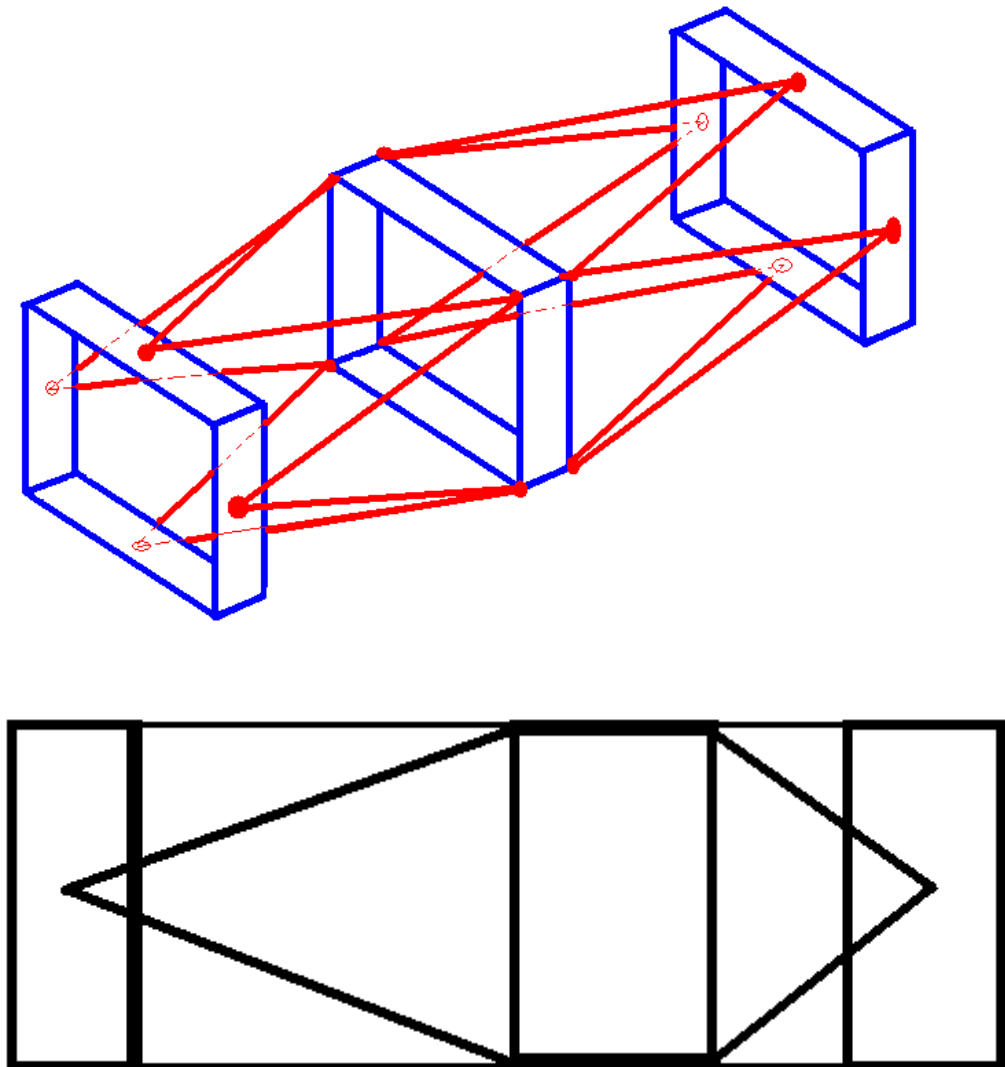


L'utilisation de cette structure uniquement pour la partie secondaire permet de s'affranchir du second effet décrit dans la partie I. Pour une structure trop souple, et pour une longueur de tube important, le premier effet peut prendre des proportions conséquentes de plusieurs dizaines de secondes d'arc, mais si l'observation est visuelle, on ne peut le détecter, hormis par le léger flou de décollimation de l'optique.

2.1) La structure Serrurier

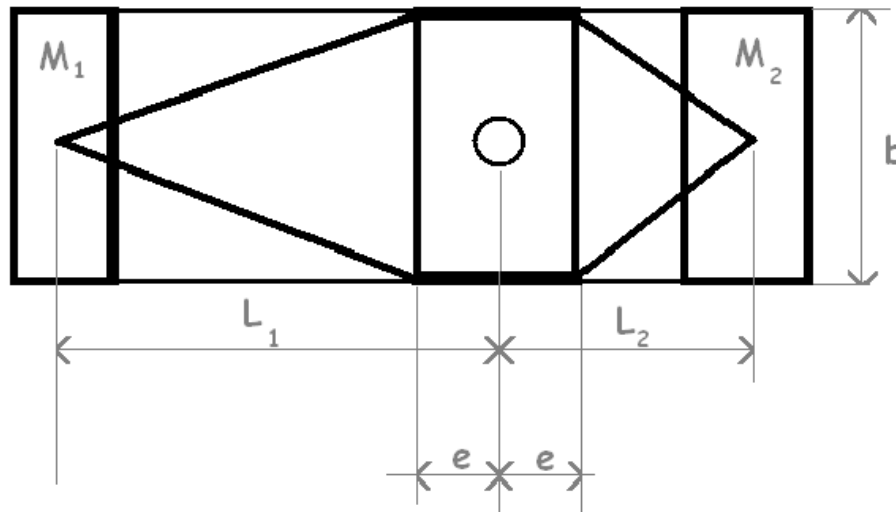
Contrairement à ce qui est parfois considéré, le principe de la structure Serrurier n'est pas de rigidifier le tube du télescope. L'idée est d'utiliser la flexion du télescope afin de ne pas subir ces conséquences sur l'observation.

Ainsi, le cadre supportant le primaire et le cadre supportant le secondaire, vont être montés sur des structures comportant 4 triangles. Le principe est de dimensionner les triangles de telle façon à ce que la flexion soit identique du côté primaire et du côté secondaire au niveau des miroirs (cf. figure ci-dessous). Ainsi, le premier défaut décrit dans la partie I n'apparaît plus, l'axe optique conservant la direction théorique. Les objets observés étant situés à l'infini, ceci ne pose aucun problème .



III) Schématisation d'un télescope respectant la structure de Mark Serrurier

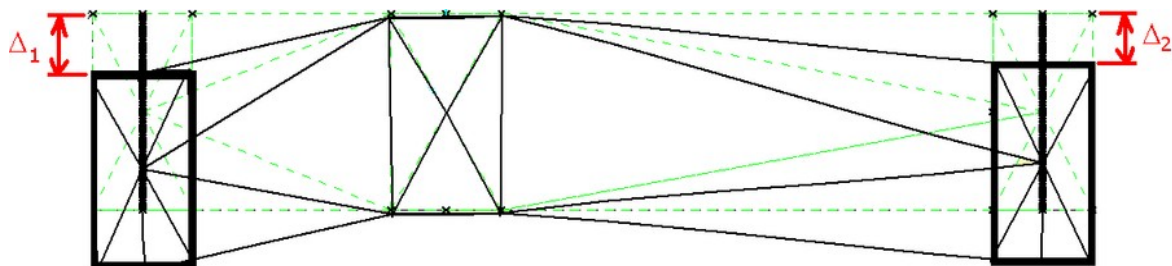
Nous introduisons l'ensemble des paramètres décrivant une structure réaliste de télescope. Ces paramètres seront utilisés afin de vérifier à la fois l'équation décrivant la flexion de la structure de Serrurier et l'équilibrage de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation (axe de déclinaison pour le cas d'une monture équatoriale)



On introduit la variable T_i donnant la longueur des poutres des triangles.

$$T_i = \frac{1}{2} \sqrt{4(L_i - e)^2 + b^2}$$

- Description des flèches pour de telles structures triangulaires:



$$\Delta_i = \frac{M_i + \frac{1}{2} m_i}{E S_i b^2} T_i^3 g$$

où m_i est la masse totale des 8 tubes d'une structure ($i=1$:primaire ou $i=2$:secondaire)

S_i est l'aire des section des tubes

E est le module d'élasticité de Young

g est le constant de pesanteur

$$m_i = 8 \rho T_i S_i$$

ρ est la masse volumique des tubes ($i=1$:côté primaire ou $i=2$: côté secondaire)

- Condition sur la flexion:

$$\Delta_1 = \Delta_2 \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{M_1 + \frac{1}{2}m_1}{E S_1 b^2} T_1^3 g = \frac{M_2 + \frac{1}{2}m_2}{E S_2 b^2} T_2^3 g$$

- Condition sur l'équilibre:

$$M_1 L_1 + \frac{1}{2}(L_1 + e)m_1 = M_2 L_2 + \frac{1}{2}(L_2 + e)m_2$$

Système d'équations vérifié par un tube avec une structure Mark Serrurier

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 L_1 + \frac{1}{2}(L_1 + e)m_1 = M_2 L_2 + \frac{1}{2}(L_2 + e)m_2 \\ \frac{M_1 + \frac{1}{2}m_1}{E S_1 b^2} T_1^3 g = \frac{M_2 + \frac{1}{2}m_2}{E S_2 b^2} T_2^3 g \end{array} \right.$$

En utilisant $m_i = 8\rho T_i S_i$ et en notant $X_i = 2T_i$, le système devient :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} M_1 L_1 + 2\rho(L_1 + e)X_1 S_1 = M_2 L_2 + 2\rho(L_2 + e)X_2 S_2 \\ \frac{M_1 + 2\rho X_1 S_1}{S_1} X_1^3 = \frac{M_2 + 2\rho X_2 S_2}{S_2} X_2^3 \end{array} \right.$$

Remarque si e=0

Si e=0, le système (1) équivaut à :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} M_1 L_1 + 2\rho L_1 X_1 S_1 = M_2 L_2 + 2\rho L_2 X_2 S_2 \\ (M_1 L_1 + 2\rho L_1 X_1 S_1) \frac{X_1^3}{L_1 S_1} = (M_2 L_2 + 2\rho L_2 X_2 S_2) \frac{X_2^3}{L_2 S_2} \end{array} \right.$$

Nous recherchons une solution physique. Les membres de la première équation de (2) sont donc strictement positifs. On obtient ainsi le système :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} M_1 L_1 + 2\rho L_1 X_1 S_1 = M_2 L_2 + 2\rho L_2 X_2 S_2 \\ \frac{X_1^3}{L_1 S_1} = \frac{X_2^3}{L_2 S_2} \end{array} \right.$$

IV) Résolutions des équations

Nous allons résoudre le système d'équations en suivant 4 jeux de 3 inconnues

- Cas 1: Valeur de la flèche Δ
Valeur des aires des sections S_1 et S_2
- Cas 2: Masse M_2
Valeur des aires des sections S_1 et S_2
- Cas 3: Masses M_1 et M_2
Valeur des aires de section S_2
- Cas 4: Masses M_1 et M_2
Valeur de la flèche Δ
avec $e \neq 0$
- Cas 4bis: Masses M_1 et M_2
Valeur de la flèche Δ
avec $e = 0$

L'ensemble des solutions est présenté dans le fichier « Serrurier.xls »

Commentaire sur les solutions

1) La flexion de la structure Serrurier est décrite par une équation approchée. Cette équation approchée est suffisante. En effet, l'homogénéité des matériaux, la réalisation concrète de la structure, sont inévitablement imparfaits par rapport au cas de l'étude théorique. Ainsi, il apparaît peut vraisemblable que les équations indiquant qu'une flexion de $30,51332 \mu\text{m}$ côté primaire, sera exactement compensée par une flexion de $30,51332 \mu\text{m}$ côté secondaire... Ainsi afin d'obtenir une solution mécanique fonctionnelle, il faut quand même veiller à avoir une faible flexion de la structure.

Prenons un exemple : Si la solution retenue indique une flexion de $10,5 \mu\text{m}$ de part et d'autre, il est raisonnable de penser que la flexion effective sera respectivement de 10 et $11 \mu\text{m}$ soit un résidu de $1 \mu\text{m}$.

2) On pourrait préférer utiliser de l'aluminium plutôt que de l'acier afin d'alléger la structure métallique. Toutefois, à flexion égale, la différence de masse entre une solution aluminium et une solution acier est négligeable. En effet, le rapport des modules de Young de l'acier et de l'aluminium est quasiment égal au rapport des masses volumiques de l'aluminium et de l'acier. En conséquence, les sections des tubes en aluminium sont plus importantes que celles des tubes en acier, ce qui au final conduit à la même masse (la structure acier est même un peu plus légère).

3) La résolution du système d'équation suivant la version 4, conduit à des solutions physiquement incorrectes dans bon nombre de cas. Il n'est donc pas facile de se fixer des sections de poutres métalliques pour trouver les masses correspondantes. Cette limitation est liée à la valeur du paramètre « e ».

Cas 1: Inconnues : S_1 ; S_2 et Δ

$$\textcircled{1} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = \frac{M_2 L_2 - M_1 L_1 + 2p(L_2 + e) X_2 S_2}{2p(L_1 + e) X_1} \\ S_2 X_1^3 (M_1 + 2p X_1 S_1) = S_1 X_2^3 (M_2 + 2p X_2 S_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \Rightarrow S_2 X_1^3 (2p(L_1 + e) X_1 M_1 + 2p X_1 (M_2 L_2 - M_1 L_1 + 2p(L_2 + e) X_2 S_2)) \\ = (M_2 L_2 - M_1 L_1 + 2p(L_2 + e) X_2 S_2) X_2^3 (M_2 + 2p X_2 S_2) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 2p(L_1 + e) X_1^4 M_1 S_2 + 2p X_1^4 S_2 (M_2 L_2 - M_1 L_1 + 2p(L_2 + e) X_2 S_2) \\ = (M_2 L_2 - M_1 L_1) X_2^3 M_2 + (M_2 L_2 - M_1 L_1) X_2^4 2p S_2 + 2p(L_2 + e) X_2^4 M_2 S_2 + 2p(L_2 + e) X_2^5 p S_2^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 4p^2 X_1^4 X_2 (L_2 + e) S_2^2 + X_1^4 2p((L_1 + e) M_1 + M_2 L_2 - M_1 L_1) S_2 = (M_2 L_2 - M_1 L_1) X_2^3 M_2 \\ + 2p X_2^4 (M_2 L_2 - M_1 L_1 + M_2 (L_2 + e)) S_2 \\ + 4p^2 X_2^5 (L_2 + e) S_2^2 \end{aligned}$$

$$4p^2(L_2 + e) X_2 (X_2^4 - X_1^4) S_2^2 + 2p(-X_1^4(e M_1 + M_2 L_2) + X_2^4(2M_2 L_2 - M_1 L_1 + e M_2)) S_2 + (M_2 L_2 - M_1 L_1) X_2^3 M_2 = 0$$

$$4p^2(L_2 + e) X_2 (X_2^4 - X_1^4) S_2^2 + 2p(M_2 L_2(2X_2^4 - X_1^4) - M_1 L_1 X_2^4 + e(M_2 X_2^4 - M_1 X_1^4)) S_2 + (M_2 L_2 - M_1 L_1) X_2^3 M_2 = 0$$

En posant

$$\begin{aligned} \alpha &= 4p^2(L_2 + e) X_2 (X_2^4 - X_1^4) \\ \beta &= 2p(M_2 L_2(2X_2^4 - X_1^4) - M_1 L_1 X_2^4 + e(M_2 X_2^4 - M_1 X_1^4)) \\ \gamma &= (M_2 L_2 - M_1 L_1) X_2^3 M_2 \end{aligned}$$

on obtient

$$\alpha S_2^2 + \beta S_2 + \gamma = 0$$

Ainsi:

$$S_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{ou} \quad S_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

, Il existe deux solutions mathématiques, mais seules les solutions positives sont physiquement correctes.

• On obtient S_1 par

$$S_1 = \frac{\rho_2 L_2 - \rho_1 L_1 + 2\rho(L_2 + e)X_2 S_2}{2\rho(L_1 + e)X_1}$$

• et Δ par

$$\Delta = \frac{M_1 + 2\rho X_1 S_1}{8 \epsilon S_1 b^2} g X_1^3$$

cas 2: Inconnues S_1, S_2 et M_2

On pose $\Delta = \Delta_1$ ainsi $\Delta = \Delta_2$

$$\text{donc } \Delta = \frac{M_2 + 2p S_2 X_2}{8ES_2 b^2} X_2^3 g$$

$$\text{d'où } M_2 = \frac{8b^2 \Delta E S_2}{g X_2^3} - 2p S_2 X_2$$

$$(1) \Rightarrow M_1 L_1 + 2p(L_1 e) X_1 S_1 = 2p(L_2 e) X_2 S_2 + \frac{L_2}{X_2^3} \left(\frac{8b^2 \Delta E S_2}{g} - 2p S_2 X_2^4 \right)$$

$$M_1 L_1 + 2p(L_1 e) X_1 S_1 = S_2 \left(2p(L_2 e) X_2 + \frac{L_2}{X_2^3} \left(\frac{8b^2 \Delta E}{g} - 2p X_2^4 \right) \right)$$

$$\text{d'où } S_2 = \frac{(M_1 L_1 + 2p(L_1 e) X_1 S_1) X_2^3}{2p(L_2 e) X_2^4 + L_2 \left(\frac{8b^2 \Delta E}{g} - 2p X_2^4 \right)}$$

$$S_2 = \frac{M_1 L_1 + 2p(L_1 e) X_1 S_1}{2pe X_2^4 g + 8b^2 \Delta E L_2 b^2} g X_2^3$$

$$\text{on obtient } S_1 \text{ par } S_1 = \frac{M_2 L_2 - M_1 L_1 + 2p(L_2 e) X_2 S_2}{2p(L_1 e) X_1}$$

$$\text{et } M_2 \text{ par } M_2 = \frac{8b^2 \Delta E S_2 b^2}{g X_2^3} - 2p S_2 X_2$$

Cas 3: Inconnues M_1 , M_2 et S_2

On pose $\Delta = \Delta_1$, donc $\Delta = \Delta_2$

donc
$$\Delta = \frac{M_1 + 2\rho S_1 x_1}{E S_1} x_1^3 g$$

d'où
$$M_1 + 2\rho S_1 x_1 = \frac{8\Delta E S_1 b^2}{g x_1^3} \quad \text{et} \quad M_1 = S_1 \left(\frac{8\Delta E b^2}{g x_1^3} - 2\rho x_1 \right)$$

$$M_1 = \frac{S_1}{g x_1^3} (8\Delta E b^2 - 2\rho g x_1^4)$$

de la même façon,
$$M_2 = \frac{S_2}{g x_2^3} (8\Delta E b^2 - 2\rho g x_2^4)$$

(1) $\Rightarrow M_1 L_1 + 2\rho(L_1 + e) x_1 S_1 = \frac{S_2 L_2}{g x_2^3} (8\Delta E b^2 - 2\rho g x_2^4) + 2\rho(L_2 + e) x_2 S_2$

d'où
$$S_2 = \frac{M_1 L_1 + 2\rho(L_1 + e) x_1 S_1}{(8\Delta E b^2 - 2\rho g x_2^4) L_2 + 2\rho g(L_2 + e) x_2^4} g x_2^3$$

ainsi
$$S_2 = \frac{M_1 L_1 + 2\rho(L_1 + e) x_1 S_1}{8\Delta E L_2 + 2\rho g e x_2^4} g x_2^3$$

on obtient M_2 par
$$M_2 = \frac{S_2}{g x_2^3} (8\Delta E b^2 - 2\rho g x_2^4)$$

Cas 4: Inconnus Π_1, Π_2 et Δ avec $\Delta = \Delta_1, \Delta = \Delta_2$

On suppose e non nul

$$(1) \Rightarrow \Pi_1 x_1^3 = \frac{S_1}{S_2} x_2^3 (M_2 + 2p x_2 S_2) - 2p x_1^4 S_1$$

$$\text{donc } \Pi_1 = \frac{S_1 x_2^3}{S_2 x_1^3} (\Pi_2 + 2p x_2 S_2) - 2p x_1 S_1$$

$$\text{donc } \frac{S_1 x_2^3}{S_2 x_1^3} (\Pi_2 + 2p x_2 S_2) L_1 - 2p x_1 S_1 L_1 + 2p (L_1 t e) x_1 S_1 = \Pi_2 L_2 + 2p (L_2 t e) x_2 S_2$$

$$\frac{S_1 x_2^3}{S_2 x_1^3} L_1 \Pi_2 + \frac{S_1 x_2^3}{S_2 x_1^3} L_1 2p x_2 S_2 + 2p e x_1 S_1 = \Pi_2 L_2 + 2p (L_2 t e) x_2 S_2$$

$$\Pi_2 \left(L_2 - \frac{S_1 x_2^3}{S_2 x_1^3} L_1 \right) = -2p x_2 S_2 \left(L_2 t e - \frac{S_1 x_2^3}{S_2 x_1^3} L_1 \right) + 2p e x_1 S_1$$

$$\Pi_2 (L_2 S_2 x_1^3 - L_1 S_1 x_2^3) = -2p x_2 S_2 \left[(L_2 t e) S_2 x_1^3 - S_1 x_2^3 L_1 \right] + 2p e x_1^4 S_1 S_2$$

$$\Pi_2 (L_2 S_2 x_1^3 - L_1 S_1 x_2^3) = 2p S_2 \left[-(L_2 t e) x_2 S_2 x_1^3 + e x_1^4 S_1 + S_1 x_2^4 L_1 \right]$$

$$\Pi_2 = \frac{-x_2 (L_2 S_2 x_1^3 - L_1 S_1 x_2^3) + e x_1^3 (x_1 S_1 - x_2 S_2)}{L_2 S_2 x_1^3 - L_1 S_1 x_2^3} 2p S_2$$

$$\Pi_2 = \left(\frac{e x_1^3 (x_1 S_1 - x_2 S_2)}{L_2 S_2 x_1^3 - L_1 S_1 x_2^3} - x_2 \right) 2p S_2$$

$$\text{on obtient } \Pi_1 \text{ par } \Pi_1 = \frac{S_1 x_2^3}{S_2 x_1^3} (\Pi_2 + 2p x_2 S_2) - 2p x_1 S_1$$

$$\text{et } \Delta \text{ par } \Delta = \frac{\Pi_1 + 2p x_1 S_1}{8 \epsilon S_1 b^2} g x_1^3$$

Cas 4 bis:**On suppose e nul**

Si on considère les masses M_1 et M_2 et la valeur de la flèche Δ comme inconnues avec $e=0$, le système (3) montre que nous avons une inconnue de trop, la seconde égalité du système ne portant pas sur les masses et imposant à elle seule la valeur de la flèche qui est par conséquent connue.

On réduit la dimensionnalité de notre problème en considérant uniquement la masse M_1 comme inconnue.

Ainsi on obtient:

$$M_1 = \frac{M_2 L_2 + 2\rho(L_2 X_2 S_2 - L_1 X_1 S_1)}{L_1}$$

et

$$\Delta = \frac{M_1 + 2\rho X_1 S_1}{8ES_1 b^2} g X_1^3$$

V) Références

Serrurier M.,
"Structural features of the 200 inch telescope for Mount Palomar observatory" Civil
Engineering Vol. 8, no. 8 p.254, **Aug 1938**

Doyle K., Vukobratovich D.,
Proc. SPIE Vol. 1690, p. 357-365, Design of Optical Instruments, David M. Aikens; Victor
L. Genberg; Gary C. Krumweide; Michael J. Thomas; Eds., **1992**