Présentation du projet :

Corrections pour les coordonnées apparentes d'un objet sur la voûte céleste

Association VOYAGER 3 Astronomie

- Espace culturelle de la Garenne - 44530 Sévérac -

*Association (Loi 1901) pour l'initiation et la pratique de l'astronomie,
Agrément Jeunesse & Education Populaire N° 44-08-12*

Commission technique de VOYAGER 3 Astronomie
Sébastien POIRIER

SOMMAIRE

1) Corrections astrométriques

1.1) Mouvement Propre

1.2) Précession des équinoxes

1.3) Nutation

1.4) Parallaxe annuelle

1.5) Aberration stellaire

1.6) Réfraction

1) Corrections astrométriques

Nous définissons les matrices de rotation R, Q, P d'angle α .

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

De façon générale les vecteurs $\vec{X}_i$ sont de la forme $\vec{X}_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \cos \delta_i \\ \sin \alpha_i \cos \delta_i \\ \sin \delta_i \end{pmatrix}$

1.1) Mouvement Propre

A partir des coordonnées $\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$ on tient compte du mouvement propre en

définissant les nouvelles coordonnées par $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \Delta \alpha) \cos(\delta + \Delta \delta) \\ \sin(\alpha + \Delta \alpha) \cos(\delta + \Delta \delta) \\ \sin(\delta + \Delta \delta) \end{pmatrix}$

avec $\Delta \alpha \simeq \mu_\alpha \Delta t$ et $\Delta \delta \simeq \mu_\delta \Delta t$

μ_α est le mouvement propre en ascension droite, μ_δ est le mouvement propre en déclinaison et Δt le temps écoulé entre la position $\vec{X}_0$ et la position $\vec{X}_1$ de l'étoile sur la voûte céleste.

(Le mouvement propre total μ est donnée par $\mu \simeq \sqrt{\mu_\delta^2 + (\mu_\alpha \cos \delta)^2}$)

1.2) Précession des équinoxes

La précession est causée par les effets de marée de la Lune et du Soleil sur la rotation de la Terre. Il correspond au mouvement de l'axe de rotation de la Terre qui décrit un cône dans l'espace

$$\mathbf{M}_p = R(z) Q(\theta) R(\xi)$$

$$\vec{X}_2 = M_p \vec{X}_1$$

1.3) Nutation

La nutation, se superpose à l'effet de précession et correspond à des oscillations de courte période (environ 18 ans) et de faible amplitude (environ 9") sur le mouvement de l'axe de rotation de la Terre.

$$\mathbf{M}_N = P(-\epsilon) P(\Delta \epsilon) R(\Delta \psi) P(\epsilon) \quad \text{équivalant à} \quad \mathbf{M}_N = P(-\epsilon + \Delta \epsilon) R(\Delta \psi) P(\epsilon)$$

$$\vec{X}_3 = M_N \vec{X}_2$$

1.4) Parallaxe annuelle

Les effets de parallaxe sont dues à l'évolution de la position de l'observateur par rapport au Soleil (Parallaxe annuelle) et au centre de la Terre (Parallaxe diurne).

Nous tenons compte uniquement de l'effet de parallaxe annuelle, l'effet de parallaxe diurne, dû à la rotation de la Terre sur son axe, étant totalement négligeable pour la position apparente des étoiles.

On note $\vec{p}_T$ le vecteur position de la Terre dans le repère écliptique. Ainsi,

$$\vec{p}_T = r \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } r = \frac{1-e^2}{1+e \cos v} a$$

e étant l'excentricité de l'orbite terrestre, a son demi-grand axe. v l'anomalie vraie de la Terre et ψ la longitude écliptique de la Terre. Ces quantités sont prises au moment de l'observation.

En se plaçant dans le repère équatoriale, on définit $\vec{V}$ par $\vec{X}_T = \frac{1}{r} P(\epsilon) \vec{p}_T$

Ainsi,

$$\vec{X}_4 = \frac{d \vec{X}_3 + r \vec{X}_T}{\sqrt{d^2 + r^2}}$$

Dans la pratique, la parallaxe annuelle sera négligée car inférieure à 0,8 seconde d'arc.

Ainsi, $\vec{X}_4 \simeq \vec{X}_3$

1.5) Aberration stellaire

L'aberration stellaire est due à l'évolution du vecteur vitesse de l'observateur par rapport au Soleil. On l'étudie ici dans le cadre relativiste.

• Le vecteur vitesse de l'observateur par rapport au Soleil $\vec{V}$ peut être décomposé comme étant la somme du vecteur vitesse de révolution de la Terre autour du Soleil $\vec{V}_{rev}$ et du vecteur vitesse de rotation de la Terre autour de son axe $\vec{V}_{rot}$.

En supposant que la Terre est une sphère de rayon R_{eq}

$$\vec{V}_{rot} = \frac{2\pi R_{eq} \cos \phi}{T_{rot}} \begin{pmatrix} -\sin \theta_{TSL} \\ \cos \theta_{TSL} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_{rev} = \begin{pmatrix} V_r \cos v - V_v \sin v \\ V_r \sin v + V_v \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \vec{V} = \vec{V}_{rot} + P(\epsilon) \vec{V}_{rev}$$

avec ϕ la latitude du lieu d'observation et T_{rot} la période de rotation de la Terre (23h56m4s). v est l'anomalie vraie de la Terre au moment de l'observation.

V_r et V_v sont respectivement la vitesse de radiale de la Terre et la vitesse tangentielle de

la Terre dans le repère héliocentrique donnée par $V_r = -C_A \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dv}$ et $V_v = \frac{C_A}{r}$ avec

C_A la constante des aires de la Terre donnée par $C_A = \sqrt{GM_s a(1-e^2)}$
 r , a et e ont été définie au paragraphe §1.4.
 G est la constante de gravitation universelle et M_s est la masse du Soleil.

On fait l'approximation d'une orbite circulaire. Ceci implique une erreur maximale sur l'aberration d'environ 0,3". De plus, On néglige la rotation de la terre sur son axe. Ceci implique une erreur maximale sur l'aberration d'environ 0,6". Ainsi,

Pour une orbite circulaire $v = \psi$ et $V_{rev} = \sqrt{\frac{GM_s}{a}}$ d'où

$$\vec{V}_{rev} = V_{rev} \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et en se plaçant dans le repère équatoriale on obtient } \vec{V}_0 = P(\epsilon) \vec{V}_{rev}$$

• Transformé de Lorentz de $(\vec{r}; t)$ dans un référentiel translaté suivant un vecteur vitesse $\vec{V}_0$

$$\begin{cases} \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \\ \vec{r}'_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} + \vec{V}_0 t) \\ ct' = \gamma\left(ct + \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}_0}{c}\right) \end{cases} \text{ avec } \vec{r}_{\parallel} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}_0}{V_0^2} \vec{V}_0, \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$$

et des définitions similaires pour $\vec{r}'_{\perp}$ et $\vec{r}'_{\parallel}$

On note $\gamma = \left(\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}\right)^{-1}$ avec c la vitesse de la lumière dans le vide.

Ainsi, en considérant un déplacement infinitésimal dans l'espace-temps $(d\vec{r}; dt)$,

$$\begin{cases} d\vec{r}'_{\perp} = d\vec{r}_{\perp} \\ d\vec{r}'_{\parallel} = \gamma(d\vec{r}_{\parallel} + \vec{V}_0 dt) \\ cdt' = \gamma\left(cdt + \frac{d\vec{r} \cdot \vec{V}_0}{c}\right) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \frac{d\vec{r}'_{\perp}}{dt'} = \frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}_0}{c^2}\right)} \\ \frac{d\vec{r}'_{\parallel}}{dt'} = \frac{\gamma\left(\frac{d\vec{r}_{\parallel}}{dt} + \vec{V}_0\right)}{\gamma\left(1 + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}_0}{c^2}\right)} \end{cases} \text{ avec } \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ainsi,

La transformé du vecteur vitesse $\vec{V}$ est $\vec{V}' = \vec{V}'_{\perp} + \vec{V}'_{\parallel}$ avec $\vec{V}'_{\perp} = \frac{d\vec{r}'_{\perp}}{dt'}$ et

$$\vec{V}'_{\parallel} = \frac{d\vec{r}'_{\parallel}}{dt'}$$

$$\text{Ainsi, à } \vec{V}' = \frac{\vec{V}_\perp + \gamma(\vec{V}_\parallel + \vec{V}_0)}{\gamma \left(1 + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}_0}{c^2}\right)}$$

La lumière provenant d'une étoile se propageant à vitesse de la lumière, nous substituons $\vec{V}$ par $\vec{c}$ et $\vec{V}'$ par $\vec{c}'$

$$\text{Or } \vec{c}_\parallel = \frac{\vec{c} \cdot \vec{V}_0}{V_0^2} \vec{V}_0 \text{ et } \vec{c}_\perp = \vec{c} - \vec{c}_\parallel \text{ Ainsi,}$$

$$\vec{c}' = a \vec{V}_0 + b \vec{c} \text{ avec } a = \frac{1 + (1 - \gamma^{-1}) \frac{\vec{c} \cdot \vec{V}_0}{V_0^2}}{1 + \frac{\vec{c} \cdot \vec{V}_0}{c^2}} \text{ et } b = \frac{\gamma^{-1}}{1 + \frac{\vec{c} \cdot \vec{V}_0}{c^2}}$$

On peut vérifier que $c' = c$, ce qui correspond bien à l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de repère.

La direction du rayon lumineux arrivant dans le repère équatoriale pour un point statique par rapport au Soleil est donnée par le vecteur $\vec{c} = -c \vec{X}_4$

Ainsi, dans le référentiel du un point animé d'un vitesse $\vec{V}_0$ par rapport au Soleil la direction ce rayon lumineux est $\vec{c}'$ et les coordonnées de l'étoile émettant ce rayon lumineux est donc:

$$\vec{X}_5 = -\frac{\vec{c}'}{c}$$

• On obtient ainsi l'expression de l'aberration stellaire:

$$\text{D'où } \vec{X}_5 = -\frac{a}{c} \vec{V}_0 + b \vec{X}_4, \quad a = \frac{1 - c(1 - \gamma^{-1}) \frac{\vec{X}_4 \cdot \vec{V}_0}{V_0^2}}{1 - \frac{\vec{X}_4 \cdot \vec{V}_0}{c}} \text{ et } b = \frac{\gamma^{-1}}{1 - \frac{\vec{X}_4 \cdot \vec{V}_0}{c}}$$

Dans la pratique, a et b sont proches de 1. Ainsi, une bonne approximation est donnée par:

$$\vec{X}_5 = -\frac{\vec{V}_0}{c} + \vec{X}_4 \text{ ce qui est l'expression classique de l'aberration}$$

1.6) Réfraction

La réfraction atmosphérique s'exprime comme une variation d'un angle Δh sur la hauteur d'un objet dans les système de coordonnée horizontale (azimute/hauteur). On note ϕ la latitude du lieu d'observation et θ_{TSL} , le temps sidéral local exprimé en radian. A est l'azimute de l'objet et h sa hauteur avant la correction.

$$\mathbf{M}_R = R(\theta_{TSL}) Q\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) R(-A) Q(\Delta h) R(A) Q\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) R(-\theta_{TSL})$$

$$\vec{X}_6 = M_R \vec{X}_5 \text{ Finalement, on a } \vec{X}_6 = \begin{pmatrix} \cos \alpha' \cos \delta' \\ \sin \alpha' \cos \delta' \\ \sin \delta' \end{pmatrix}$$

où α' et δ' correspondent aux coordonnées apparentes